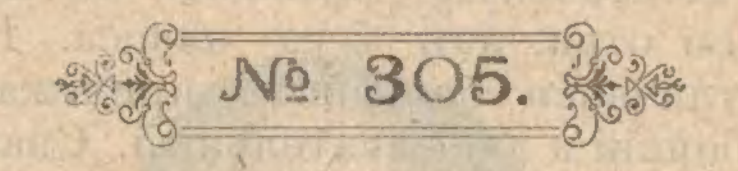
XXVI Сем. № 6.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

30 Сентября № 305. 1901 г.



Памяти М. В. Остроградскаго.

12-го Сентября исполнилось 100 лѣтъ со дня рожденія знаменитаго математика Михаила Васильевича Остроградскаго. По своимъ научнымъ заслугамъ Остроградскій стоитъ на ряду съ выдающимися корифеями науки и занимаетъ почетное мѣсто въ ряду русскихъ математиковъ, пріобрѣтшихъ своими трудами громкую извѣстность во всемъ математическомъ мірѣ.

Чествованіе памяти Остроградскаго состоялось въ Полтавѣ, вблизи которой онъ родился и въ которой скончался. 12-го Сентября Полтавскій Кружокъ Любителей Физико-Математическихъ Наукъ имѣлъ торжественное засѣданіе, на которомъ присутствовали делегаты многихъ русскихъ университетовъ, другихъ высшихъ учебныхъ заведеній и ученыхъ обществъ.

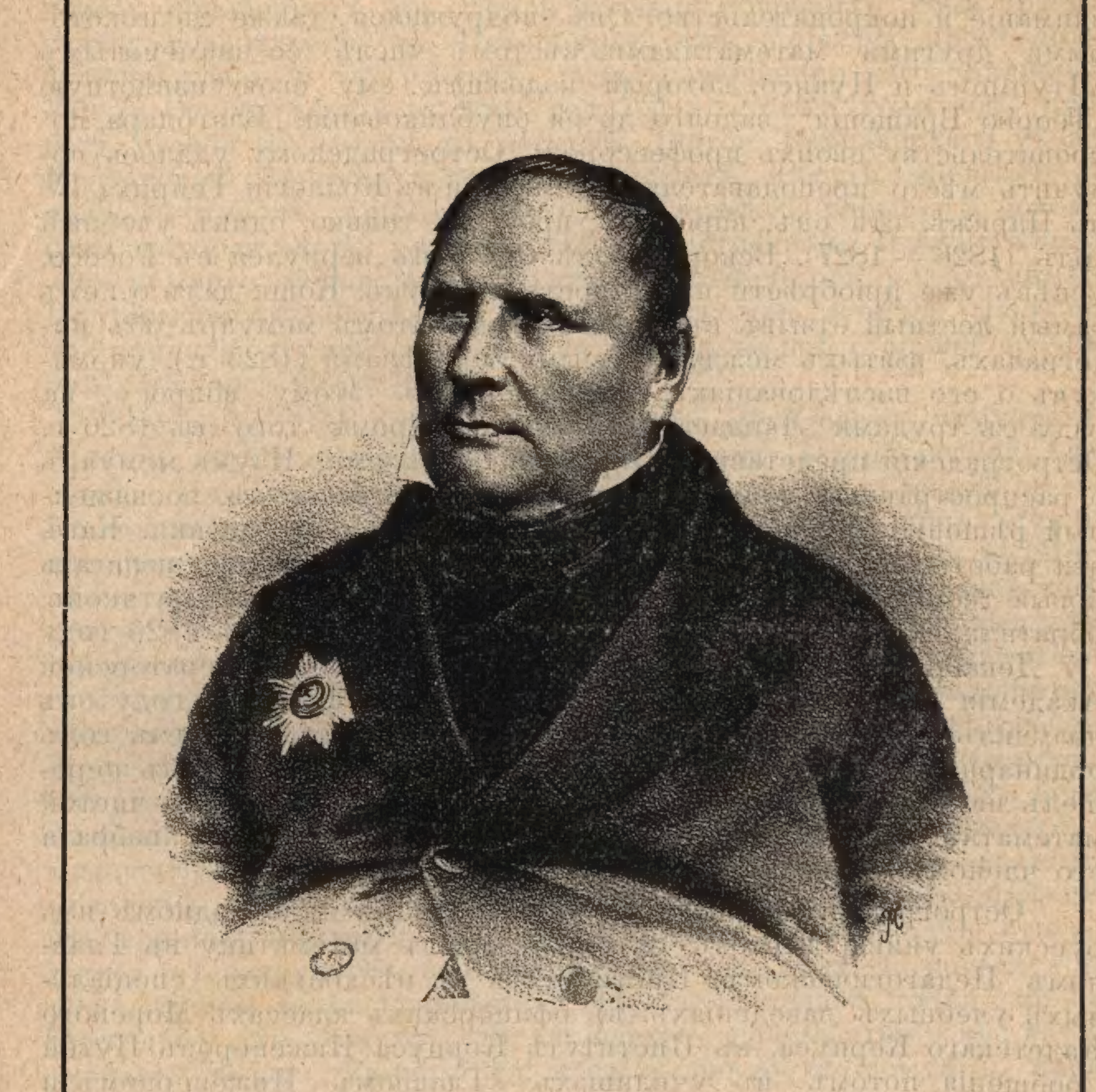
Послѣ привѣтственныхъ рѣчей, профессора́ Харьковскаго университета М. А. Тихомандрицкій, В. А. Стекловъ и А. М. Ляпуновъ прочли доклады о трудахъ Остроградскаго въ различныхъ отрасляхъ чистой и прикладной математики, а профессоръ В. П. Ермаковъ произнесъ рѣчь „О состояніи математики въ XIX столѣтіи".

Почти единственнымъ печатнымъ источникомъ нашихъ свѣдѣній о жизни Остроградскаго служитъ „Очеркъ жизни и ученой

дѣятельности Михаила Васильевича Остроградскаго", составленный его преемникомъ въ Академіи, Сомовымъ, и помѣщенный въ III томѣ „Записокъ Императорской Академіи Наукъ". Изъ этого очерка заимствованы изложенныя ниже свѣдѣнія о жизни Остроградскаго.

Михаилъ Васильевичъ Остроградскій родился 12 сентября 1801 г. въ деревнѣ Пашенной—въ имѣніи своего отца, помѣщика Полтавской губерніи, Кобелянскаго уѣзда. 8 лѣтъ отъ роду онъ былъ отданъ въ Полтавскую гимназію, но не окончивъ курса, вышелъ, по желанію отца, изъ 3-го класса. Въ гимназіи, впрочемъ, онъ и не отличался большимъ прилежаніемъ, хотя былъ мальчикъ живой, бойкій и любознательный. Сначала отецъ хотѣлъ опредѣлить его на военную службу, что соотвѣтствовало собственному желанію молодого Остроградскаго, но затѣмъ, по совѣту одного изъ родственниковъ, Устимовича, рѣшено было опредѣлить его въ Харьковскій университетъ. Готовясь къ поступленію въ университетъ, Остроградскій однако постоянно просилъ отца отдать его на военную службу и крайне неохотно сдѣлался студентомъ. Поступивъ на физико-математическій факультетъ, Остроградскій первое время занимался плохо, не переставая мечтать о военной службѣ. Въ концѣ второго учебнаго года онъ поселился у преподавателя математики Павловскаго, вліяніе котораго на Остроградскаго оказалось чрезвычайно благотворнымъ. Обративъ вниманіе на необыкновенныя способности юноши, Павловскій уговорилъ его отказаться отъ мечты сдѣлаться военнымъ и сумѣлъ возбудить въ немъ любовь къ наукѣ. Въ 1818 году Остроградскій вышелъ изъ университета, не окончивъ полнаго курса, но получивъ аттестатъ, въ которомъ значилось, что онъ оказалъ большіе успѣхи какъ въ математикѣ, такъ и въ нѣкоторыхъ другихъ предметахъ, преподававшихся на физико-математическомъ факультетѣ. Проживъ годъ въ деревнѣ у отца, Остроградскій снова поступилъ въ университетъ для окончанія курса и въ 1820 году выдержалъ окончательный экзаменъ.

Бывшій тогда ректоромъ учитель Остроградскаго, извѣстный русскій математикъ Осиповскій, предложилъ дать ему сразу степень кандидата, безъ дальнѣйшихъ испытаній. Онъ, однако, встрѣтилъ противодѣйствіе въ лицѣ профессора философіи Дудровича, который изъ за личной непріязни къ Осиповскому не только ставилъ всевозможныя препятствія его ученику, но путемъ доноса попечителю округа добился того, что министръ народнаго просвѣщенія отказалъ въ ходатайствѣ университета о предоставленіи Остроградскому степени и приказалъ даже не возвращать ему выданный ему въ 1818 году студенческій аттестатъ. Остроградскому оставалось либо снова подвергнуться испытанію, либо отказаться отъ полученія степени; онъ выбралъ послѣднее и упросилъ отца послать его за-границу — поучиться у французскихъ знаменитыхъ математиковъ.



M. В. Остроградскій.

Род. 12 Сентября 1801 г. † 20 Декабря 1861 г.

Въ Августѣ мѣсяцѣ 1822 года Остроградскій отправился въ Парижъ, гдѣ слушалъ лекціи въ Сорбоннѣ и въ College de France. Своимъ прилежаніемъ и способностями онъ обратилъ на себя вниманіе своихъ знаменитыхъ профессоровъ: Лапласа, Фурье, Ампера, Пуассона, Коши—, которые оказывали ему всевозможное вниманіе и покровительство. Онъ подружился также съ нѣкоторыми другими математиками, въ томъ числѣ со знаменитымъ Штурмомъ и Пуансо, который изложилъ ему свою извѣстную „Теорію Вращенія" задолго до ея опубликованія. Благодаря покровительству своихъ профессоровъ, Остроградскому удалось получить мѣсто преподавателя математики въ Коллегіи Генриха IV въ Парижѣ, гдѣ онъ, впрочемъ, пробылъ только одинъ учебный годъ (1826—1827). Вскорѣ послѣ того онъ вернулся въ Россію, успѣвъ уже пріобрѣсти извѣстность въ наукѣ. Коши далъ о немъ самый лестный отзывъ въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ объ интегралахъ, взятыхъ между мнимыми предѣлами (1825 г.), упомянувъ о его изслѣдованіяхъ, посвященныхъ этому вопросу, на ряду съ трудами Лапласа и Пуассона. Кромѣ того въ 1826 г. Остроградскій представилъ Парижской Академіи Наукъ мемуаръ о распространеніи волнъ въ цилиндрическомъ сосудѣ, посвященный рѣшенію труднаго вопроса математической физики. Какъ эти работы, такъ и способность Остроградскаго изящно излагать новыя теоріи, заимствованныя имъ у французскихъ математиковъ, обратили на него вниманіе соотечественниковъ. Въ 1826 году (17 Декабря) онъ былъ избранъ адъюнктомъ Императорской Академіи Наукъ по прикладной математикѣ. Въ 1830 году онъ получилъ званіе экстраординарнаго академика, а черезъ годъ ординарнаго. Въ 1855 году, по смерти П. Н. Фусса, онъ перешелъ на открывшуюся вакансію ординарнаго академика по чистой математикѣ. Въ 1856 году Парижская Академія Наукъ избрала его членомъ-корреспондентомъ.

Остроградскій никогда не читалъ лекцій ни въ одномъ изъ русскихъ университетовъ; онъ преподавалъ математику въ Главномъ Педагогическомъ Институтѣ и въ нѣсколькихъ спеціальныхъ учебныхъ заведеніяхъ: въ офицерскихъ классахъ Морского Кадетскаго Корпуса, въ Институтѣ Корпуса Инженеровъ Путей Сообщенія, потомъ въ училищахъ — Главномъ Инженерномъ и Артиллерійскомъ. Остроградскій много трудился для военно-учебныхъ заведеній, гдѣ онъ долгое время состоялъ главнымъ наблюдателемъ по маѳематическимъ наукамъ. Для военно-учебныхъ заведеній онъ составилъ курсъ элементарной геометріи и конспектъ по тригонометріи; этому послѣднему онъ придавалъ такое значеніе, что сдѣлалъ о немъ особый докладъ Академіи Наукъ. Въ 1829 и 1830 году онъ прочелъ въ Академіи курсъ по небесной механикѣ, состоявшій изъ двѣнадцати лекцій на французскомъ языкѣ; курсъ этотъ былъ записанъ и изданъ ученикомъ его, инженеромъ Янушевскимъ, и въ 1830 году Остроградскій лично представилъ его Парижской Академіи Наукъ; разсмотрѣніе курса было поручено Академіей Араго и Пуассону,

которые дали о немъ самый лестный для Остроградскаго отзывъ. Во время этого путешествія въ Парижъ, Остроградскій неосторожнымъ обращеніемъ съ сѣрной спичкой повредилъ себѣ правый глазъ; возвращаясь въ Петербургъ, онъ дорогой простудилъ больной глазъ и по пріѣздѣ туда совершенно его лишился. Умеръ Остроградскій въ 1861 году. Лѣто этого года онъ провелъ у себя въ имѣніи, въ деревнѣ Долгое, Кобелянскаго уѣзда, Полтавской губерніи, и тамъ въ Августѣ мѣсяцѣ заболѣлъ; на правой сторонѣ спины у него образовался нарывъ, а потомъ рана, которая скоро сдѣлалась злокачественной. Почувствовавъ себя немного лучше, онъ поѣхалъ въ Петербургъ, но доѣхавъ до Полтавы снова заболѣлъ и остался тамъ для леченія. Болѣзнь его приняла дурной оборотъ и не смотря на всѣ старанія врачей, онъ скончался 20-го Декабря.

Остроградскій опубликовалъ свыше пятидесяти мемуаровъ, большая часть которыхъ была представлена Петербургской Академіи. Изъ лекцій его, кромѣ упомянутыхъ уже лекцій по небесной механикѣ, были опубликованы (въ 1837 г.) лишь „Лекціи алгебраическаго и трансцендентнаго анализа“, читанныя въ Морскомъ кадетскомъ корпусѣ, болѣе или менѣе хорошо извѣстныя всѣмъ русскимъ математикамъ. Всѣ изслѣдованія Остроградскаго посвящены вопросамъ анализа и главнымъ образомъ, аналитической механикѣ, которая была любимымъ предметомъ знаменитаго математика. Изъ мемуаровъ его, посвященныхъ механикѣ, особенно замѣчательны слѣдующіе: мемуаръ о моментахъ, въ которомъ онъ развиваетъ идеи Фурье, о томъ что условія возможныхъ перемѣщеній приходится иногда выражать неравенствами: мемуаръ о мгновенныхъ перемѣщеніяхъ системъ, подчиненныхъ перемѣннымъ условіямъ (1838), гдѣ вводятся связи, зависящія явнымъ оброзомъ отъ времени; мемуаръ о дифференціальныхъ уравненіяхъ, относящихся къ задачѣ объ изопериметрахъ (1848), гдѣ Остроградскій, разсматривая вопросы механики съ очень общей точки зрѣнія, приходитъ къ началу, получившему впослѣдствіи въ наукѣ названіе начала Гамильтона; и въ особенности мемуаръ, представленный Петербургской Академіи въ 1854 году и содержащій общую теорію ударовъ. Въ гидродинамикѣ Остроградскій извѣстенъ своимъ изслѣдованіемъ о равновѣсіи жидкаго сферическаго слоя.

Что касается работъ Острогадскаго по чистому Анализу, то среди нихъ прежде всего надо упомянуть объ его замѣчательной формулѣ для варіаціи кратнаго интеграла и объ извѣстномъ способѣ интегрированія раціональныхъ функцій. Не менѣе извѣстно данное имъ выраженіе для остаточнаго члена Эйлеровой формулы суммованія и найденный имъ въ теоріи чиселъ способъ вычисленія первообразныхъ корней, для которыхъ онъ вычислилъ удобныя таблицы.

Новые пріемы рѣшенія уравненій третьей и четвертой степени.

Въ февральской книжкѣ „Nouvelles Annales de Mathématiques“ за 1899 г. профессоръ Высшей Школы въ Pezen'ѣ (въ Богеміи) *A. Pleskot* помѣстилъ небольшую статью подъ заглавіемъ „Nouveau procédé pour résoudre les équations du troisième degré“ *). Въ январьской книжкѣ того-же журнала за текущій годъ профессоръ *Tsurnichi Hayashi* помѣстилъ статью, представляющую собой дополненіе къ предыдущей въ томъ смыслѣ, что *Hayashi* удалось примѣнить аналогичный пріемъ къ рѣшенію уравненій четвертой степени. Обѣ статьи вмѣстѣ составляютъ цѣльную теорію рѣшенія уравненій третьей и четвертой степени; самый же способъ ихъ рѣшенія, предложенный *Pleskot*, отличается изяществомъ и простотой. Мы полагаемъ поэтому, что изложеніе этихъ двухъ работъ представитъ интересъ для читателей „Вѣстника“.

1. *Задача. Въ уравненіи второй степени*

$$x^2+ax+b=0 \qquad (1)$$

дано значеніе свободнаго члена b. Требуется опредѣлить коэффиціентъ a такимъ образомъ, чтобы одинъ изъ корней уравненія (1) представлялъ собой квадратъ второго корня.

Рѣшеніе. Обозначимъ черезъ y значеніе второго корня требуемаго уравненія, тогда первый корень имѣетъ значеніе, равное y^2. Въ силу соотношенія между корнями квадратнаго уравненія —

$$y+y^2=-a, \qquad (2)$$

$$y^3=b. \qquad (3)$$

Если обозначимъ черезъ $\sqrt[3]{b}$ одно изъ значеній этого радикала, а черезъ 1, ε_1 и ε_2 три корня третьей степени изъ 1, то найдемъ изъ уравненія (3), что y можетъ имѣть одно изъ трехъ значеній:

$$y_1=\sqrt[3]{b},\quad y_2=\varepsilon_1\sqrt[3]{b},\quad y_3=\varepsilon_2\sqrt[3]{b}.$$

Соотвѣтственно этому число a можетъ имѣть одно изъ трехъ значеній:

$$a_1=-\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^2},$$

$$a_2=-\varepsilon_1\sqrt[3]{b}-\varepsilon_1^2\sqrt[3]{b^2}, \qquad (4)$$

$$a_3=-\varepsilon_2\sqrt[3]{b}-\varepsilon_2^2\sqrt[3]{b^2}.$$

Обратно, если въ уравненіи (1) коэффиціентъ a имѣетъ

*) „Новый пріемъ рѣшенія уравненій третьей степени“.

одно изъ трехъ значеній (4), скажемъ a_i, то этому уравненію удовлетворяютъ числа y_i и y_i^2, такъ какъ

$$y_i + y_i^2 = -a_i,$$

$$y_i \cdot y_i^2 = b.$$

Итакъ, для того, чтобы уравненіе (1) обладало требуемымъ свойствомъ, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціентъ a имѣлъ одно изъ значеній (4).

2. Предыдущая задача можетъ быть однако разрѣшена иначе. Предположимъ, что въ уравненіи (1) коэффиціентъ a выбранъ такъ, что корни уравненія обладаютъ требуемымъ свойствомъ. Тогда одинъ изъ корней этого уравненія y удовлетворяетъ соотношеніямъ (2) и (3). Обратно, если нѣкоторое число y удовлетворяетъ соотношеніямъ (2) и (3), то y и y^2 суть корни уравненія (1). Мы можемъ поэтому высказать слѣдующее утвержденіе:

Для того чтобы уравненіе (1) имѣло корни, одинъ изъ которыхъ равняется квадрату второго, необходимо и достаточно, чтобы уравненія (2) и (3) имѣли бы общій корень—y.

Постараемся же найти условія, при которыхъ это имѣетъ мѣсто. Если обозначимъ черезъ y_1 и y_2 корни уравненія (2), то для того, чтобы одинъ изъ нихъ удовлетворялъ уравненію (3) необходимо и достаточно, чтобы $(y_1^3 - b)(y_2^3 - b) = 0$. Предыдущее соотношеніе можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$y_1^3 \cdot y_2^3 - (y_1^3 + y_2^3)b + b^2 = 0. \qquad (5)$$

Но такъ какъ y_1 и y_2 суть корни уравненія (2), то

$$y_1^3 \cdot y_2^3 = (y_1 \cdot y_2)^3 = a^3,$$

а

$$y_1^3 + y_2^3 = (y_1 + y_2)^3 - 3y_1y_2(y_1 + y_2) = -1 + 3a.$$

Соотношеніе (5) можетъ быть поэтому представлено въ видѣ:

$$a^3 - 3ab + b + b.^2 = 0. \qquad (6)$$

Итакъ, для того, чтобы уравненіе (1) удовлетворяло требованіямъ задачи, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты его удовлетворяли соотношенію (6).

3. Мы нашли выше, что числа a_1, a_2, a_3, опредѣляемыя равенствами (4) суть единственныя значенія коэффиціента a, при которомъ уравненіе (1) обладаетъ требуемымъ свойствомъ. Сопоставляя это съ тѣмъ результатомъ, къ которому мы пришли при второмъ рѣшеніи задачи, мы отсюда заключаемъ, что a_1, a_2, a_3 суть корни уравненія (6), если разсматривать въ немъ a, какъ неизвѣстное.

4. Предыдущія разсужденія такимъ образомъ привели насъ

къ рѣшенію уравненія третьей степени вида —

$$z^3 - 3bz + b + b^2 = 0. \qquad (7)$$

Если обозначимъ черезъ $\sqrt[3]{b}$ одно изъ значеній этого радикала, то корни уравненія (7) выражаются формулой

$$z = -\varepsilon\sqrt[3]{b} - \varepsilon^2\sqrt[3]{b^2}, \qquad (8)$$

гдѣ ε есть одинъ изъ трехъ кубическихъ корней изъ 1; тремъ значеніямъ ε отвѣчаютъ три корня уравненія.

Если намъ удастся показать, что всякое уравненіе 3-ей степени можетъ быть приведено къ виду (7), то этимъ будетъ исчерпанъ вопросъ о рѣшеніи уравненій третьей степени.

5. Всякое уравненіе третьей степени можетъ быть, какъ извѣстно, приведено къ виду —

$$x^3 + px + q = 0 \text{ *)}. \qquad (9)$$

Мы будемъ принимать $p \gtrless 0$, такъ какъ при $p = 0$, рѣшеніе уравненія (9) не представляетъ затрудненій.

Если положимъ $x = \frac{z}{\lambda}$, то уравненіе (9) приводится къ виду —

$$z^3 + p\lambda^2 z + q\lambda^3 = 0.$$

Этимъ способомъ можно привести уравненіе (9) къ виду (7) въ томъ случаѣ, если можно выбрать число λ и b такъ, чтобы

$$p\lambda^2 = -3b \text{ и } q\lambda^3 = b + b^2. \qquad (10)$$

Если исключимъ b изъ уравненій (10), то найдемъ, что λ должно удовлетворять уравненію

$$9q\lambda^3 = -3p\lambda^2 + p^2\lambda^4. \qquad (11)$$

Если λ удовлетворяетъ уравненію (11), то первое изъ уравненій (10) опредѣляетъ соотвѣтствующее значеніе b:

$$b = -\frac{p\lambda^2}{3}. \qquad (12)$$

Однако λ въ подстановкѣ $x = \frac{z}{\lambda}$ должно быть отлично отъ нуля. Поэтому нулевые корни уравненія (11) для насъ непригодны; исключая ихъ, мы замѣнимъ уравненіе (11) уравненіемъ

$$p^2\lambda^2 - 9q\lambda - 3p = 0, \qquad (13)$$

корни котораго отличны отъ нуля, такъ какъ $p \lessgtr 0$. Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующей теоремѣ:

---

*) Для этого достаточно въ уравненіи $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$ положить $y = x - \frac{A}{3}$.

Всякое уравненіе 3-ей степени вида (9), въ которомъ $p \lesseqgtr 0$, можетъ быть приведено къ виду (7). Для этого достаточно сдѣлать подстановку $x = \frac{z}{\lambda}$, гдѣ λ есть одинъ изъ корней уравненія (13). Тогда b опредѣляется равенствомъ (12).

6. Итакъ, предположимъ, что мы привели уравненіе (9) къ виду —

$$z^3 - 3bz + b + b^2 = 0. \qquad (14)$$

Принимая во вниманіе, что корень этого уравненія выражается формулой (8) и что число b въ этомъ случаѣ имѣетъ значеніе (12), мы можемъ сказать, что корни уравненія (14), преобразованнаго изъ уравненія (9) посредствомъ подстановки $x = \frac{z}{\lambda}$, имѣютъ значенія

$$z = -\varepsilon \sqrt[3]{-\frac{p'^2}{3}} - \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{p^2\lambda^4}{9}},$$

гдѣ λ есть одинъ изъ корней уравненія (13).

Поэтому корни уравненія (9) выражаются формулой

$$x = -\varepsilon \sqrt[3]{-\frac{p}{3\lambda}} - \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{p^2\lambda}{9}}. \qquad (15)$$

7. Этимъ, въ сущности, исчерпанъ вопросъ о рѣшеніи уравненій третьей степени. Мы еще постараемся показать, что формула (15) совпадаетъ съ формулой Кардана.

Такъ какъ за λ можно принять *любой* корень уравненія (13), то мы примемъ

$$\lambda = \frac{9q + \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{2p^2}.$$

Тогда

$$-\frac{p}{3\lambda} = -\frac{2p^3}{3[9q + \sqrt{81q^2 + 12p^3}]} = \frac{9q - \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18}$$

$$= \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

а $$\frac{p^2\lambda}{9} = \frac{9q + \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18} = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Подставляя эти выраженія въ формулу (15), получимъ формулу Кардана:

$$x = \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

8. Теперь мы перейдемъ къ рѣшенію уравненій 4-ой степени аналогичнымъ пріемомъ, предложеннымъ *Hayashi*.

Положимъ, что x_1 и x_2 суть корни квадратнаго уравненія

$$x^2-ax+\frac{1}{b}=0.$$

Составимъ выраженіе

$$z=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\frac{1}{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}}, \qquad (16)$$

гдѣ x_1 и x_2 корни послѣдняго уравненія:

Значенія радикаловъ $\sqrt{x_1}$ и $\sqrt{x_2}$ могутъ быть выбраны произвольно. Такъ какъ

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1}}=\frac{1}{\sqrt{x_1 . x_2}}=\sqrt{b}\,, \qquad (17)$$

то

$$z-\sqrt{b}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}. \qquad (18)$$

Какое изъ двухъ значеній имѣетъ радикалъ $\sqrt{b}$, зависитъ отъ выбора значеній радикаловъ $\sqrt{x_1}$ и $\sqrt{x_2}$. Возвысивъ обѣ части равенства (18) въ квадратъ и принимая во вниманіе, что $x_1+x_2=a$ и $\sqrt{x_1x_2}=\frac{1}{\sqrt{b}}$, мы получимъ

$$z^2+(b-a)=2\left(z\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

Новое возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$z^4+2(b-a)z^2+(b-a)^2=4z^2b+8z+\frac{4}{b}.$$

Иными словами число z удовлетворяетъ уравненію

$$z^4-2(a+b)z^2-8z+(b-a)^2-\frac{4}{b}=0. \qquad (19)$$

Какъ мы сказали, каждому изъ радикаловъ $\sqrt{x_1}$ и $\sqrt{x_2}$ можетъ быть приписано любое изъ двухъ его значеній; такимъ образомъ возможны четыре комбинаціи, которымъ соотвѣтствуютъ четыре значенія количества z. Мы можемъ поэтому сказать, что формула (16) выражаетъ четыре корня уравненія (19).

9. Корни эти можно выразить и непосредственно въ коэффиціентахъ уравненія (19). Въ самомъ дѣлѣ

$$(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1 . x_2}=a+\frac{2}{\sqrt{b}},$$

а потому

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{a+\frac{2}{\sqrt{b}}}\cdot$$

При чемъ четыремъ комбинаціямъ радикаловъ лѣвой части соотвѣтствуютъ четыре комбинаціи тѣхъ же радикаловъ правой части. Такимъ образомъ

$$z=\sqrt{b}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{b}}+a}. \qquad (20)$$

10. Если мы обнаружимъ, что всякое уравненіе четвертой степени можетъ быть приведено къ виду (19), то вопросъ о рѣшеніи уравненій четвертой степени будетъ исчерпанъ. Этимъ мы и займемся.

Извѣстно, что всякое уравненіе четвертой степени можетъ быть приведено къ виду—

$$x^4+px^2+qx+r=0 \text{ *)}. \qquad (21)$$

Коэффиціентъ q мы можемъ при этомъ считать отличнымъ отъ нуля, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы имѣли бы дѣло съ уравненіемъ биквадратнымъ.

Если мы теперь положимъ $x=\frac{z}{\lambda}$, то приведемъ наше уравненіе къ виду —

$$z^4+p\lambda^2z^2+q\lambda^3z+\lambda^4r=0.$$

Мы постараемся теперь выбрать числа λ, a и b такъ, чтобы

$$p\lambda^2=-2(a+b),$$
$$q\lambda^3=-8, \qquad (22)$$
$$r\lambda^4=(a-b)^2-\frac{4}{b}\cdot$$

Если это окажется возможнымъ, то требуемое преобразованіе будетъ выполнено. Второе изъ уравненій этой системы (22) опредѣляетъ значеніе λ —

$$\lambda=-\frac{2}{q^{1/3}}\cdot$$

Такъ какъ намъ нужна *какая либо* система значеній количествъ λ, a и b, удовлетворяющихъ системѣ уравненій (22), то въ выраженіи для λ можно приписать количеству $q^{1/3}$ любое изъ трехъ значеній. Подставляя это значеніе въ остальныя два урав-

*) Для этого достаточно въ уравненіи $y^4+Ay^3+By^2+Cy+D=0$ положить $y=x-\frac{A}{4}\cdot$

ненія (22) мы можемъ представить ихъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{2p}{q^{2/3}} = -(a-b)-2b \qquad (23)$$

$$\frac{16r}{q^{4/3}} = (a-b)^2 - \frac{4}{b}.$$

Опредѣляя при помощи перваго изъ этихъ уравненій $(a-b)$ и подставляя найденное выраженіе во второе, мы получимъ для опредѣленія b слѣдующее уравненіе:

$$\frac{4r}{q^{4/3}} = \left(\frac{p}{q^{2/3}}+b\right)^2 - \frac{1}{b}.$$

По освобожденіи отъ знаменателя, мы придемъ къ уравненію третьей степени относительно b:

$$b(p+bq^{2/3})^2 = 4br + q^{4/3}.$$

Если взять теперь вмѣсто b одинъ изъ корней этого уравненія, то получаемъ изъ уравненія (23)

$$a = -\left(\frac{2p}{q^{2/3}} \mp b\right). \qquad (24)$$

Мы пришли такимъ образомъ къ слѣдующему предложенію: *Всякое уравненіе четвертой степени вида (21), въ которомъ коэффиціентъ q отличенъ отъ нуля, можетъ быть приведено къ виду (19) подстановкой $x = \frac{z}{\lambda}$.*

11. Намъ остается дать окончательное выраженіе корней уравненія (21). Такъ какъ корни уравненія (19) выражаются формулой (20), такъ какъ, далѣе

$$x = \frac{z}{\lambda} = -\frac{q^{1/3}z}{2}$$

и количество a имѣетъ значеніе, опредѣляемое равенствомъ (24), то мы можемъ формулировать результатъ слѣдующимъ образомъ:

Корни уравненія

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

гдѣ $q \lesseqgtr 0$, *выражаются формулой*

$$x = -\frac{q^{1/3}}{2}\left\{\sqrt{b}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{b}}-\left(\frac{2p}{q^{2/3}}+b\right)}\right\},$$

гдѣ b есть произвольный корень уравненія третьей степени

$$b(p+bq^{2/3})^2 = 4br + q^{4/3}.$$

Н. Р. (Одесса).

Расширеніе нашихъ чувствъ.

Вступительная лекція, прочитанная 19-го Мая 1900 г. Otto Wiener'омъ, ординарнымъ профессоромъ Лейпцигскаго Университета.

Переводъ Д. Шора.

*(Продолженіе *).*

Только нѣкоторые электрическіе инструменты далеко превосходятъ глазъ и ухо абсолютною чувствительностью по отношенію къ энергіи. Напримѣръ, зеркальный гальванометръ, которымъ измѣряются количества электричества или электрическіе токи. Какъ извѣстно, мы, вообще, не ощущаемъ электрическаго тока, проходящаго черезъ наше тѣло, если онъ не достаточно силенъ: *измѣненіе* же тока мы всегда въ состояніи воспринять: но для раздраженія нашихъ нервовъ электрическимъ токомъ, проходящимъ черезъ два довольно близкихъ мѣста на нашемъ тѣлѣ, какъ (напримѣръ черезъ концы большого и указательнаго пальцевъ, требуется уже энергія приблизительно въ 20 эрговъ [48]).

Тѣмъ бо́льшее значеніе имѣетъ инструментъ, столь чувствительный къ электрическимъ явленіямъ. Вмѣстѣ съ другими электрическими аппаратами онъ замѣняетъ намъ особое электрическое чувство; и если бы судить по состоянію современнаго ученія объ электричествѣ, то едва ли бы можно было предположить, что мы не обладаемъ въ этой области непосредственнымъ чувствомъ.

Чувствительнѣйшій изъ построенныхъ до сихъ поръ гальванометровъ—это гальванометръ *Paschen'а* [49]). Порогъ его возбудимости лежитъ нѣсколько ниже *одной билліонной эрга* [50]); такъ что онъ приблизительно въ 10000 разъ чувствительнѣе глаза и уха. Моргнувъ одинъ разъ глазомъ, мы расходуемъ работу, достаточную, чтобы произвести сто билліоновъ разъ наименьшее отклоненіе этого инструмента. Достаточно привести его полюсы

---

*) См. № 304 „Вѣстника".

[48]) Не найдя никакихъ относящихся къ этому данныхъ, я установилъ вышеприведенное число при помощи слѣдующаго примѣрнаго опыта: сопротивленіе составляло около 40000 омовъ, напряженіе электричества было равно 20 вольтамъ; при этихъ условіяхъ былъ измѣренъ наименьшій промежутокъ времени, который необходимъ, чтобы воспринять ощущеніе, вызываемое токомъ; измѣреніе было произведено при помощи опредѣленія скорости колебанія проволоки, вставленной между двумя нажимами контактовъ; это время оказалось равнымъ 0,0002 секунды; отсюда получается вышеприведенное значеніе для порога энергіи.

[49]) *F. Paschen*, Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 13, S. 13, 1893.

[50]) Приблизительно такимъ же, если не меньшимъ еще, порогомъ энергіи обладаетъ электрометръ *Nernst-Dolezalek'а* (см. *F. Dolezalek*, Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 17, S. 65, 1897).

въсоприкосновеніе съ двумя различными частями нашего тѣла, чтобы достигнуть уже очень значительнаго отклоненія. Такимъ образомъ человѣкъ въ самомъ добродушномъ настроеніи оказывается сильно наэлектризованнымъ. Что въ дѣйствительности настроеніе духа человѣка играетъ здѣсь роль, доказываютъ опыты *Тарханова* и *Sticker'a* [51]). Если надлежащимъ образомъ соединить оба полюса гальванометра съ внутренней и внѣшней поверхностями руки, то гальванометръ показываетъ токъ; напряженіе этого тока измѣняется, если слегка щекотать человѣка, надъ которымъ производится опытъ, или если дать ему понюхать сильно пахучаго вещества, или внезепно вызвать въ немъ раздраженіе при помощи свѣта или звука; при этомъ не происходитъ никакого замѣтнаго дрожанія руки. Даже больше: производя надъ кѣмъ нибудь описываемый опытъ станемъ называть при этомъ рядъ извѣстныхъ ему лицъ; гальванометръ будетъ обнаруживать измѣненіе тока, зависящее отъ того интереса, съ которымъ испытуемый человѣкъ относится къ каждому изъ названныхъ лицъ [52]).

Такіе зеркальные гальванометры, вслѣдствіе ихъ большой чувствительности, очень часто употребляются въ нашихъ лабораторіяхъ. Врядъ ли существуетъ явленіе, котораго бы нельзя было прослѣдить при помощи этого инструмента; для этого необходимо только перевести изслѣдуемый родъ энергіи въ электрическую или заставить ее вызывать электричество.

Такъ, силу звука можно измѣрять электрическимъ токомъ, произведеннымъ этимъ звукомъ въ телефонѣ. При этомъ слѣдуетъ извѣстнымъ образомъ видоизмѣнить гальванометръ [53]).

Далѣе, силу свѣта можно измѣрять, нагрѣвая тонкіе проволоки свѣтомъ и опредѣляя обусловленное этимъ измѣненіе въ ихъ электропроводности. Этимъ способомъ *Langley* [54]) и *Paschen'y* [55]) удалось доказать существованіе въ высшей степени малыхъ колебаній температуры въ проволокѣ; послѣдній обнаружилъ даже колебанія, меньше, чѣмъ въ *одну милліонную часть градуса Цельзія* [56]). Между тѣмъ порогъ ощущеній разности температуры достигаетъ у насъ приблизительно $^1/_5$ градуса Цельзія [57]).

Гальванометръ замѣняетъ намъ, такимъ образомъ, глазъ для воспріятія инфракрасныхъ лучей большой длины волны, лучей на нашъ глазъ не дѣйствующихъ. Въ то время какъ нашъ глазъ ощущаетъ область цвѣтовыхъ оттѣнковъ, которая, говоря языкомъ

---

[51]) *Georg Sticker*, Wiener klinische Rundschau, № 30 u. 31, 1897.

[52]) По частному сообщенію профессора *Sticker'a* въ Гиссенѣ.

[53]) Варіаціонный гальванометръ *Rubens'a*, Wied. Ann., Bd. 59, S. 27, 1895.

[54]) *Langley*, American Journal of science, 3. Ser., томъ 32, p. 92, 1886, и Annales de chimie et de physique, 6. Serie, томъ 9, p. 455, 1886.

[55]) *F. Paschen*, Wied. Ann., Bd. 48, S. 272, 1893.

[56]) Тамъ же, S. 286.

[57]) См. цитированную въ 11-омъ прим. книгу „Lehrbuch der Physiologie“ *Hermann'a*, S. 486.

акустики, не составляетъ даже цѣлой октавы, —нашему изслѣдованію при помощи гальванометра и фотографической пластинки, благодаря трудамъ *Rubens'a* и *Schumann'a*, доступны больше девяти октавъ. Эти волны уже мало отличаются отъ электромагнитныхъ волнъ *Hertz'a*, которыя имѣютъ еще бо́льшую длину.

Теперь мы снова пришли къ пункту, изъ котораго мы исходили, именно къ вопросу о возможности воспріятія явленій природы, для ощущенія которыхъ мы непосредственно не обладаемъ никакимъ органомъ чувства. Именно въ области магнитизма нашъ искусственный органъ чувства, — магнитная стрѣлка—обнаружилъ замѣчательнѣйшіе факты. Эта стрѣлка часто подвергается сильнымъ колебаніямъ, которыя называютъ магнитными бурями; въ высшей степени замѣчательно, что послѣдовательность этихъ бурь измѣняется паралельно съ измѣненіемъ количества полярныхъ сіяній и солнечныхъ пятенъ.

Но никогда способность физики создавать новыя чувства не выступала такъ рѣзко, какъ въ новѣйшее время; я говорю о великомъ открытіи *Röntgen'a*. Рентгеновскіе лучи передаются нашимъ чувствамъ при помощи экрана, покрытаго двойною солью ціанистаго барія и ціанистой платины, который превращаетъ ихъ энергію въ свѣтовую,—или менѣе непосредственно, при помощи фотографической пластинки. Какимъ шагомъ впередъ въ дѣлѣ приспособленія къ окружающей средѣ является это, въ буквальномъ смыслѣ слова, углубленіе нашего взгляда, указываетъ, напримѣръ, примѣненіе этихъ лучей въ хирургіи.

Этотъ способъ изслѣдованія явленій, которыя непосредственно очень мало доступны чувственному воспріятію или даже вовсе не ощущаются нами, примѣняется въ физикѣ вообще очень часто. Я приведу еще только одинъ подобный примѣръ. Что вода загрязнена растворенными въ ней твердыми веществами, мы можемъ узнать по осадку при испареніи. Но этотъ способъ не примѣнимъ, если вода очень чиста. Чистѣйшую воду, какая только когда-либо существовала, приготовилъ *Friedrich Kohlrausch* [58]) вмѣстѣ съ *Heydweiller'омъ*. Въ силу электропроводности, которую сообщаютъ водѣ твердыя вещества, *Kohlrausch* слышалъ при помощи телефона, что въ 15 кубическихъ сантиметрахъ такой воды было растворено только нѣсколько стотысячныхъ долей миллиграмма этого твердаго вещества.

Этихъ примѣровъ будетъ достаточно.

* * *

(Продолженіе слѣдуетъ).

---

[58]) *F. Kohlrausch* и *Ad. Heydweiller*, Sitzungsberichte der Kgl. Preuss Acad. d Wiss. zu Berlin, S. 295, 1894, I.

О фотографированіи помощью малаго отверстія.

Въ №-рѣ 7 (Май, 1901 г.) „Фотографическаго Обозрѣнія" помѣщена статья Д. В. Томсона, въ которой онъ излагаетъ свои опыты фотографированія безъ помощи объектива. Онъ пользуется малымъ отверстіемъ, которое, какъ извѣстно, даетъ въ темной камерѣ обратное изображеніе находящихся передъ камерой предметовъ. Изображеніе, которое получается при помощи малаго отверстія, обыкновенно считаютъ слишкомъ расплывчатымъ, неяснымъ и потому непригоднымъ для фотографическихъ снимковъ. Мы полагаемъ поэтому не лишеннымъ интереса привести здѣсь краткій рефератъ этой статьи, которая отдаетъ этому способу фотографированія въ нѣкоторыхъ случаяхъ даже предпочтеніе передъ обыкновеннымъ. Само собой разумѣется, что отвѣтственность за изложенные факты падаетъ всецѣло на автора.

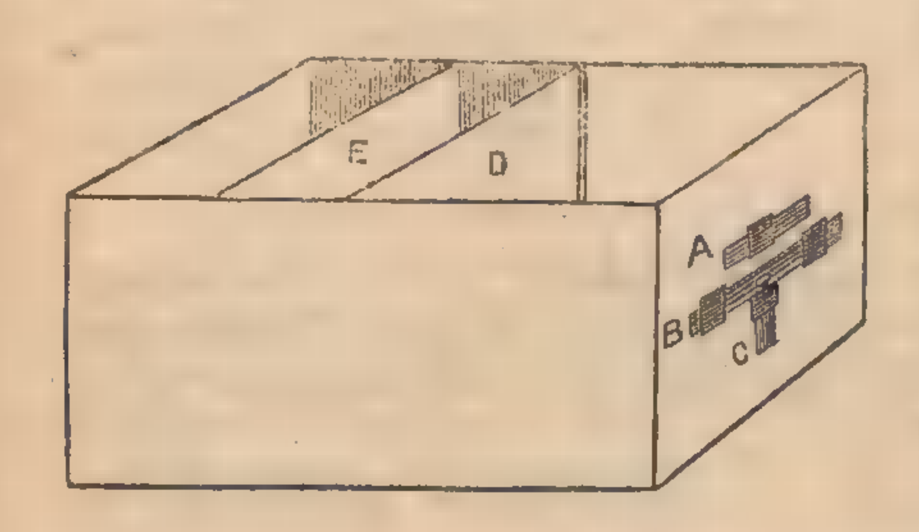
Кромѣ своей дешевизны, способъ фотографированія при помощи малаго отверстія, имѣетъ еще и то преимущество, что при немъ отсутствуетъ вопросъ о наведеніи фокуса. Мы можемъ съ одного и того же мѣста снимать фотографіи различной величины передвигая въ камерѣ пластинку. Кромѣ того малое отверстіе даетъ болѣе широкій уголъ изображенія, чѣмъ лучшіе объективы (обыкновенный хорошій объективъ даетъ уголъ до 75°, малое же отверстіе—120°). Далѣе фотографированіе малымъ отверстіемъ имѣетъ еще то преимущество, что рисунокъ получается совершенно ровнымъ, тогда какъ при объективѣ для этого нужно употреблять діафрагмы, да и это не всегда достигаетъ цѣли. Малое отверстіе свободно еще отъ тѣхъ недостатковъ, которые проистекаютъ отъ неоднородности объектива, ахроматизма, астигматизма и т. д.

Правда снимки не получаются при пользованіи малымъ отверстіемъ столь рѣзкими, какъ отъ объективовъ, но это и не всегда необходимо. Особенно при снимкахъ неодушевленной природы: пейзажей и т. д. А этимъ способомъ приходится снимать почти только неодушевленные предметы, такъ какъ время экспозиціи должно быть относительно очень велико.

Отверстіе Д. В. Томсонъ совѣтуетъ прокалывать иглою № 10. При меньшемъ отверстіи рѣзкость конечно еще больше, но соотвѣтственно этому увеличивается и время экспозиціи. Чтобы получить на пластинкѣ все то, что обыкновенно охватываетъ глазъ, т. е. пространство въ 50°—60°, Томсонъ совѣтуетъ удалять пластинку на 4 дюйма отъ отверстія для четверти пластинки, на 5 дюймовъ—для полпластинки и на 6 дюймовъ—для цѣлой пластинки. Но для того чтобы опредѣлить всетаки содержаніе рисунка можно пользоваться самодѣльнымъ угломѣрнымъ снарядомъ. Для этого мы чертимъ на листѣ бумаги равнобедренный треугольникъ, основаніемъ котораго служитъ либо длина либо ширина пластинки, а высотою разстояніе ея до от-

верстія. Уголъ при вершинѣ этого треугольника и даетъ намъ уголъ подъ которымъ получается изображеніе, ▪ слѣдовательно мы имѣемъ возможность разсчитать, какіе предметы попадутъ на него.—Въ виду того, что пучекъ свѣта очень узокъ, экспозиція должна продолжаться, какъ уже упомянуто выше, сравнительно долго. Такъ, „если за величину фокуснаго разстоянія принять четыре дюйма и взять отверстіе, даваемое иглой № 10, то при быстрыхъ пластинкахъ и яркомъ солнечномъ свѣтѣ правильная экспозиція будетъ приблизительно слѣдующая: морской пейзажъ—около двухъ секундъ; отдаленный видъ безъ близкаго перваго плана—6 секундъ; близкій видъ съ свѣтлыми предметами на первомъ планѣ—12 секундъ; близкій видъ съ темными предметами или тѣнями на первомъ планѣ, напримѣръ, видъ узкой улицы,—двадцать четыре секунды". Вообще говоря, работая вмѣсто объектива малымъ отверстіемъ, приходится увеличивать экспозицію приблизительно въ 60 разъ.

Камера Д. В. Томсона (см. рис.) въ высшей степени проста. Это небольшой ящикъ, поперечное сѣченіе котораго сдѣлано соотвѣтствующимъ употребительнымъ фотографическимъ пластинкамъ, длина же доходитъ до 8 дюймовъ. На передней части продѣланы четыре малыхъ отверстія, которыя снабжены каждое затворомъ. Эти отверстія употребляются въ зависимости отъ того какой снимокъ желательно произвести. Два боковыя даютъ возможность дѣлать стереоскопическіе снимки, для чего необходимо, понятно, вставить въ камеру перегородку. Верхнее отверстіе употребляется, когда желаютъ исключить изъ рисунка ближайшіе предметы. Наконецъ центральное употребляется во всѣхъ остальныхъ случаяхъ.



При помощи малаго отверстія можно снимать также и гравюры; при чемъ не трудно высчитать во сколько разъ гравюра уменьшится или увеличится. Также малое отверстіе можно съ успѣхомъ примѣнять для изготовленія такъ называемыхъ панорамныхъ снимковъ, т. е. снимковъ на цилиндрически вогнутую поверхность фотографической пленки.

Мы привели здѣсь этотъ рефератъ въ надеждѣ, что онъ побудитъ кого-либо изъ читателей „Вѣстника Опытной Физики" заняться этими интересными опытами.

П. Э. (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Астрономическія Извѣстія.

Сектръ сѣвернаго сіянія. Одному изъ участниковъ Шпицбергенской геодезической экспедиціи, астроному I. I. Сикорѣ, во время зимовки въ 1899—1900 г., удалось получить нѣсколько фотографическихъ снимковъ сѣвернаго сіянія, результаты измѣреній которыхъ онъ и публикуетъ теперь въ „Извѣстіяхъ Академіи Наукъ“. Такъ какъ интенсивность этого спектра вообще очень мала, то оказалось необходимымъ довести экспозицію до нѣсколькихъ часовъ, и каждый снимокъ представляетъ поэтому суммарный спектръ отъ нѣсколькихъ явленій въ различные дни.

Всякій разъ наиболѣе характерными особенностями спектра являлись три свѣтлыя линіи: зеленая, фіолетовая и ультрафіолетовая, для которыхъ длина волны въ среднемъ опредѣляется слѣдующими числами:

для зеленой . . . . $\lambda = 557.0\ \mu\mu$,

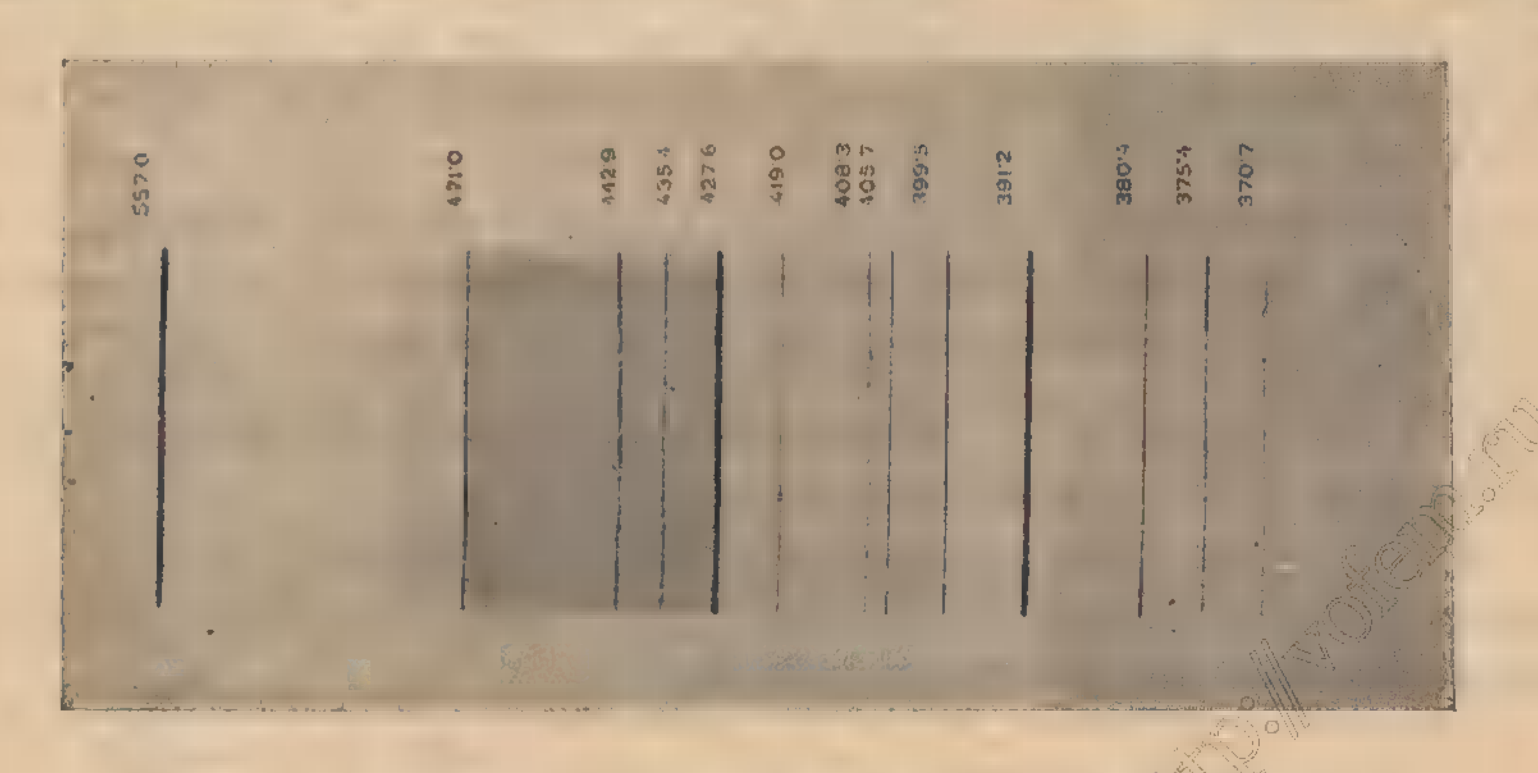
для фіолетовой . . . . . . $\lambda = 427.6$ „ ,

для ультрафіолетовой . . . $\lambda = 391.2$ „ .

На одномъ изъ негативовъ замѣтно между этими характерными линіями и за ультрафіолетовой еще нѣсколько болѣе слабыхъ, положеніе которыхъ также оказалось возможнымъ опредѣлить.

Прилагаемый рисунокъ даетъ относительное расположеніе этихъ линій.

Замѣчательно, что спектръ сѣвернаго сіянія не напоминаетъ



Спектръ сѣверныхъ сіяній по фотографическимъ снимкамъ.

ни одного изъ извѣстныхъ спектровъ. По своему положенію нѣкоторыя линіи ближе всего подходятъ къ линіямъ азота; но про-

стого сравненія спектровъ по мнѣнію г. Сикоры мало. Нужно было бы спеціально изслѣдовать спектры азота при условіяхъ наиболѣе различныхъ, особенно для разрѣженнаго газа въ трубкѣ безъ электродовъ. Можетъ быть оказалось бы полезнымъ примѣнить измѣненія температуры и плотности.

К. Покровскій.

РЕЦЕНЗІИ.

Сжиженіе газовъ и ихъ примѣненія. Сочиненіе **Жюльена Лефевра,** профессора въ Нантѣ. Переводъ съ французскаго *С. И. Ламанскаго.* С.-Петербургъ. 1901. (V + 157 стр.).

Въ этой книжкѣ изложены главнѣйшія работы, относящіяся къ сжиженію газовъ, начиная съ изслѣдованій Фарадэя (1823 г.)— кончая послѣдними работами (1899 г.) Ольшевскаго, Dewar'a, Ramsay'я и мн. др.

Первая часть книги посвящена краткому теоретическому введенію въ данный вопросъ, и занимаетъ всего на всего лишь 11 страницъ. На нашъ взглядъ это введеніе не вполнѣ достигаетъ своей цѣли, и книжка Лефевра была бы доступна значительно бо́льшему кругу читателей, если бы эта теоретическая часть была пространнѣе. Въ настоящемъ же ея видѣ, мы можемъ рекомендовать ее только лицамъ знакомымъ съ элементами высшей математики или, еще лучше, съ университетскимъ курсомъ экспериментальной физики.

Во второй практической части, занимающей остальную часть книги, читатель найдетъ связное и вполнѣ удовлетворительное описаніе большого числа опытовъ и приборовъ. Кромѣ чисто практическихъ изслѣдованій — о сжиженіи газовъ, о приведеніи ихъ въ статическое капельно-жидкое состояніе, о ихъ примѣненіи въ промышленности—, здѣсь говорится также и о теоретическихъ работахъ, тѣсно связанныхъ съ практическими; такъ глава седьмая посвящена „новымъ изслѣдованіямъ о критической точкѣ“.

Изложеніе повсюду интересно. Слѣдуетъ отмѣтить, что работамъ французовъ авторъ отдаетъ преимущество, что по отношенію къ ожиженію газовъ не вполнѣ справедливо.

Переводъ былъ бы удовлетворителенъ, если бы не пестрѣлъ галлицизмами. Мѣстами встрѣчаются и болѣе крупные промахи. Кромѣ того непонятно, почему переводчикъ не счелъ нужнымъ въ приложенномъ къ книжкѣ библіографическомъ спискѣ перевести заглавія статей. Многія изъ нихъ написаны на англійскомъ и нѣмецкомъ языкахъ, и Лефевръ перевелъ ихъ на французскій.

Въ русскомъ изданіи они такъ и остались переведенными на французскій. Также на стран. 13 слѣдовало бы перевести заглавіе рѣчи Фарадэя.

Издана книжка небрежно, опечатокъ много.

Д. Шоръ (Одесса).

„Таблицы пятизначныхъ логариѳмовъ чиселъ и тригонометрическихъ величинъ". Составилъ **Я. Блюмбергъ**, преподаватель Митавской гимназіи. Цѣна 65 коп. Митава. 1901.

Въ предисловіи къ этимъ таблицамъ составитель указываетъ на то, что настоящее изданіе вызвано желаніемъ избавить учащихся отъ неудобствъ, проистекающихъ, по его мнѣнію, отъ употребленія вмѣсто логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ ихъ ариѳметическихъ дополненій до 10. Составитель находитъ, что предлагаемая имъ таблица, содержащая „дѣйствительные" (?) логариѳмы тригонометрическихъ величинъ, выраженные отрицательными характеристиками и положительными мантиссами, представляетъ собой не маловажныя удобства въ практическомъ отношеніи.

Едва ли можно согласиться съ составителемъ въ томъ, что употребленіе логариѳмовъ съ отрицательными характеристиками представляетъ не маловажное облегченіе сравнительно съ „вѣками освященнымъ, но никакимъ серьезнымъ доводомъ не мотивированнымъ обычаемъ" пользоваться ариѳметическимъ дополненіемъ логариѳмовъ до 10. И тотъ и другой способъ выраженія логариѳмовъ одинаково, по нашему мнѣнію, удобенъ и неудобенъ: если при старомъ способѣ приходилось имѣть въ виду десятки, то при этомъ способѣ приходится производить дѣйствія надъ отрицательными характеристиками, что также требуетъ вниманія.

Заслуживаетъ одобренія помѣщеніе табличекъ Деламбра и толково составленное введеніе къ этимъ табличкамъ (стр. XVI, с.). Изданы таблицы очень хорошо,—шрифтъ и печать не оставляютъ желать лучшаго. Мы считаемъ нужнымъ еще разъ оговорить, что мы не видимъ неудобства въ пользованіи логариѳмами съ отрицательными характеристиками; мы считаемъ это только не болѣе—(и пожалуй не менѣе)—удобнымъ, чѣмъ употребленіе наращенныхъ логариѳмовъ. Принимая это во вниманіе, мы вполнѣ рекомендуемъ таблицы г. Блюмберга вниманію преподавателей.

Ред.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 94 (4 сер.). Въ данной окружности проведена хорда AB. Вписать въ эту окружность треугольникъ xAy такъ, чтобы хорда AB дѣлила уголъ xAy пополамъ и чтобы отношеыіе $\frac{Ax}{Ay}$ было равно отношенію данныхъ отрѣзковъ a и b.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 95 (4 сер.). Какое пятизначное число слѣдуетъ прибавить къ милліону, чтобы полученное такимъ образомъ новое число имѣло 108 дѣлителей, уменьшенное же въ 12 разъ—70, а увеличенное въ 18 разъ—160 дѣлителей?

Н. Готлибъ (Митава).

№ 96 (4 сер.). Найти два цѣлыхъ числа, разность которыхъ равняется ихъ удвоенному частному.

П. Полушкинъ (Знаменка).

№ 97 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\frac{x^5 - a}{x - b} = y^4,$$

$$\frac{y^5 - a}{y - b} = x^4.$$

Заимств. изъ *Casopis*.

№ 98 (4 сер.). Показать, что разность между квадратомъ разстоянія произвольной точки окружности отъ наиболѣе удаленной вершины вписаннаго въ эту окружность равносторонняго треугольника и произведеніемъ разстояній той же точки окружности до двухъ другихъ вершинъ того же треугольника есть величина постоянная.

Заимств. изъ *Supplemento al periodico di matematica*.

№ 99 (4 сер.). Двѣ струны, желѣзная и мѣдная, настроены въ унисонъ. Зная, что натяженіе мѣдной струны втрое болѣе натяженія желѣзной и что отношеніе плотностей обоихъ металловъ равно 1,15, опредѣлить 1) отношеніе діаметровъ обѣихъ струнъ; 2) натяженіе, сравнительно съ первоначальнымъ, желѣзной струны въ томъ случаѣ, когда интервалъ между тонами двухъ струнъ сдѣлается равнымъ $\frac{3}{2}$.

Заимств. изъ *Journal de Physique, Chimie et Histoire naturelle élémentaires*.

(Сообщилъ *М. Гербановскій*).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 28 (4 сер.). *Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи x число*

$$x^{600} - x^{56}$$

дѣлится на 2890.

Если x кратно 17-и, то $x^{56} = (x^2)^{28}$ кратно 17^2. Если x не кратно 17-и, то, представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$x\left[\left(x^{272}\right)^2 - 1^2\right] = x^{56}\left[\left(x^{17.16}\right)^2 - 1^2\right],$$

заключаемъ, что численное значеніе его дѣлится на $x^{17.16} - 1$; это же выраженіе, равное $x^{\varphi(17^2)} - 1$, *) дѣлится при x не кратномъ 17 согласно съ теоремой Эйлера на 17^2. Итакъ, числовая величина предложеннаго выраженія всегда дѣлится на 17^2. Точно также, представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$x^{56}\left[\left(x^4\right)^{136} - 1^{136}\right] = x^{56}\left[\left(x^{\varphi(5)}\right)^{136} - 1^{136}\right]$$

и разсмотрѣвъ отдѣльно случаи, когда x кратно и не кратно 5, найдемъ, что числовая величина выраженія $x^{600} - x^{56}$ всегда кратна 5-и. Численная величина предложеннаго выраженія всегда кратна 2-хъ, такъ какъ числа x^{600} и x^{56} одновременно либо оба четны, либо оба нечетны, смотря по тому, четно или нечетно x.

Такимъ образомъ числовая величина выраженія $x^{600} - x^{56}$ всегда дѣлится при x цѣломъ на $2.5.17^2 = 2890$.

П. Полушкинъ (Знаменка); *Н. Готлибъ* (Митава).

№ 43 (4 сер.). *Доказать, что наименьшее кратное чиселъ 1, 2, 3, ... , 2n равно наименьшему кратному чиселъ n+1, n+2, ... , 2n.*

Назовемъ наименьшее кратное перваго ряда чиселъ черезъ M, а наименьшее кратное второго ряда чиселъ черезъ M'. Такъ какъ M, будучи кратно всѣхъ чиселъ 1, 2, . . . n кратно между прочимъ чиселъ $n+1$, $n+2$, . . . , $2n$, то оно кратно ихъ наименьшаго кратнаго, т. е. M'.

Съ другой стороны, въ рядѣ чиселъ $n+1$, $n+2$, ... n всегда можно найти хоть одно число, кратное любого изъ чиселъ

$$1, 2, \ldots, n \qquad (1).$$

Дѣйствительно, пусть α одно изъ чиселъ ряда (1), $x\alpha$—гдѣ x число цѣлое—общій видъ чиселъ кратныхъ α. Рѣшая неравенства

$$n < x\alpha \leqq 2n,$$

находимъ:

$$\frac{n}{\alpha} < x \leqq 2\,\frac{n}{\alpha} \qquad (2).$$

Такъ какъ отношеніе $\frac{n}{\alpha}$ не менѣе 1, то изъ неравенствъ (2) всегда найдемъ для x хоть одно цѣлое значеніе. Отсюда видно, что при надлежа-

*) Символомъ φ обозначено число положительныхъ чиселъ, не большихъ цѣлаго числа, поставленнаго въ скобкахъ за символомъ, и взаимно простыхъ съ нимъ.

щемъ выборѣ x число $x\alpha$ равно одному изъ чиселъ

$$n+1,\ n+2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ 2n \qquad (3).$$

Такимъ образомъ M', кратное любого числа ряда (3), кратно $x\alpha$ и потому кратно α, гдѣ α—любое изъ чиселъ ряда (1); будучи же кратно всѣхъ чиселъ ряда (1), M' кратно M, ихъ наименьшаго кратнаго. Итакъ M кратно M', но и M' кратно M, откуда

$$M = M'.$$

П. Полушкинъ (Знаменка); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *К. Гудковъ* (Свеаборгъ).

№ 50 (4 сер.). *Пусть A, B, C — три цѣлыхъ числа, записанныхъ соотвѣтственно по десятичной системѣ:*

A — при помощи 2m цыфръ, равныхъ 1;

B — при помощи m+1 цыфръ, равныхъ 1;

C — при помощи m цыфръ, равныхъ 6.

Доказать, что A+B+C+8—точный квадратъ.

Цисло A, записанное $2m$ единицами, равно числу, записанному $2m$ девятками, дѣленному на 9. Но число, записанное $2m$ девятками, равно $10^{2m}-1$. Слѣдовательно

$$A = \frac{10^{2m}-1}{9} \qquad (1).$$

Точно также найдемъ, что

$$B = \frac{10^{m+1}-1}{9} \qquad (2),$$

$$C = \frac{10^{m}-1}{9}\cdot 6 \qquad (3).$$

Изъ равенствъ (1), (2) и (3) находимъ:

$$A+B+C+8 = \frac{10^{2m}-1+10^{m+1}-1+6.10^{m}-6+72}{9} = \frac{10^{2m}+10^{m}(10+6)+64}{9} =$$

$$= \frac{10^{2m}+16.10^{m}+64}{9} = \frac{(10^{m}+8)^2}{9} = \left(\frac{10^{m}+8}{3}\right)^2.$$

Итакъ, цѣлое число $A+B+C+8$ есть квадратъ раціональнаго, а слѣдовательмо и цѣлаго числа $\dfrac{10^{m}+8}{3}$.

П. Полушкинъ (Знаменка); *Н. Готлибъ* (Дуббельнъ).

№ 58 (4 сер.). *Какому условію должны удовлетворять коэффиціенты уравненія*

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

для того, чтобы корни его образовали ариѳметическую прогрессію?

Представивъ уравненіе третьей степени въ видѣ

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

и назвавъ черезъ α средній изъ трехъ членовъ прогрессіи, образуемой кор-

нями, черезъ β — разность этой прогрессіи, согласно съ элементами теоріи уравненій имѣемъ:

$$\frac{b}{a} = -[(\alpha-\beta)+\alpha+(\alpha+\beta)] = -3\alpha. \qquad (1)$$

$$\frac{c}{a} = \alpha(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\alpha(\alpha+\beta) = 3\alpha^2-\beta^2 \qquad (2)$$

$$\frac{d}{a} = -\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = -\alpha(\alpha^2-\beta^2) \qquad (3).$$

Изъ уравненія (1) имѣемъ:

$$\alpha = -\frac{b}{3a} \qquad (4).$$

Изъ уравненія (2) (см. (4)) слѣдуетъ:

$$a^2-\beta^2 = \frac{c}{a} - 2x^2 = \frac{c}{a} - \frac{9b^2}{a^2} = \frac{9ac-2b^2}{9a^2}. \qquad (5).$$

Поэтому (см. (3), (4), (5)):

$$\frac{d}{a} = \frac{b}{3a}\cdot\frac{9ac-2b^2}{9a^2},$$

или

$$27a^2d = b(9ac-2b^2).$$

Это равенство и представляетъ собою искомое условіе.

В. Нерехтскій (Кіевъ); *В. Раздарскій* (Владикавказъ); *Н. Готлибъ* (Дуббельнъ).

№ 61 (4 сер.). *Доказать, что если n цѣлое положительное число, не дѣлящееся на 5, то численная величина выраженія*

$$(11^{2n}-2^{6n})(n^4-1)$$

дѣлится на 285.

Множитель $11^{2n}-2^{6n}$ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$(11^2)^n-(2^6)^n = 121^n-64^n,$$

откуда видно, что онъ кратенъ разности 121—64=57.

Множитель n^4-1 при n, не кратномъ 5-и, дѣлится по теоремѣ Фермата на 5. Таъимъ образомъ все выраженіе дѣлится на произведеніе $57.5=285$.

Н. Готлибъ (Дуббельнъ); *Б. Мерцаловъ* (Оре *П. Полушкинъ* (Знаменка); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); *К. Гудковъ* (Свеаборгъ лъ); *Кудинъ* (Москва).
); *С.*

ПОПРАВКА: Въ задачѣ № 84 (4 сер.), помѣщенной въ № 303 „Вѣстника" вмѣсто словъ „круга вписаннаго" слѣдуетъ читать „круга описаннаго".

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 27-го сентября 1901 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.